Методика определения бескупонной кривой доходности

Смирнов С.Н., Лапшин В.А.

1 Основные понятия

1.1 Процентная ставка

В финансовом анализе при рассмотрении будущих потоков платежей часто используют понятие текущего значения (PV, present value). Рассмотрим альтернативу: гарантированно получить 1 рубль через 1 год или d рублей сейчас. Значение d, при котором альтернативы будут равнозначны, называют текущим значением 1 рубля, полученного через 1 год. Это та сумма, которую инвестор согласится получить или отдать сейчас в обмен на платёж в будущем, текущая рыночная стоимость 1 рубля, полученного через 1 год. Зависимость текущей стоимости 1 рубля от срока до платежа t называют функцией дисконтирования и обозначают $d(t)$, а её значения в отдельных точках t_i называют коэффициентами дисконтирования и обозначают d_i. Исходя из экономического смысла, можно постулировать следующие свойства функции дисконтирования:

1. $d(0) = 1$: 1 рубль немедленно стоит ровно один рубль;
2. $d(t_1) < d(t_2)$, если $t_1 < t_2$: мы предпочитаем получить деньги раньше, чем позже;
3. $d(t) > 0$: деньги стоят сколько-то через любой промежуток времени;
4. $\lim_{t\to+\infty} d(t) = 0$: деньги бесконечно далеко нас не интересуют.

Вместо функции дисконтирования часто используют различные процентные ставки, так как они более наглядны. Так, процентная ставка на срок t, подразумеваемая коэффициентом дисконтирования $d(t)$ — это размер ставки на срок t, который должен начисляться, чтобы инвестиция размером $d(t)$ через время t выросла до размера 1. Конкретное числовое значение процентной ставки $r(t)$ зависит от способа (конвенции) начисления процентов. Например, при непрерывном начислении процентов выполнено соотношение

$$d(t) = \exp(-r(t)t),$$

а при дискретном раз в δ:

$$d(t) = \frac{1}{(1 + r(t)\delta)^{\frac{t}{\delta}}}\,.$$

Выбор того или иного способа начисления процентов — вопрос конвенции. Мы будем использовать непрерывное начисление процентов, так как это удобнее с математической точки зрения. Отметим, что рыночные котировки чаще даются с использованием дискретного начисления процентов раз в 3, 6 или 12 месяцев.

Говоря о «срочной структуре процентных ставок», обычно имеют в виду зависимость процентной ставки[1] r от времени t, эту зависимость также называют бескупонной кривой доходности, но далее мы будем называть её просто кривой доходности, везде подразумевая «бескупонная». Эта терминология будет понятна из изложенного ниже.

1.2 Инструменты

Срочная структура процентных ставок отражает желание рынка давать в долг или принимать средства на определённый срок под те или иные проценты. Однако на различных рынках эта структура может быть различной. Ситуацию осложняет тот факт, что различные рынки могут существовать в пределах одной физической биржи. Так, рынок облигаций и рынок краткосрочных заимствований — это разные рынки, и следует с большой осторожностью подходить к использованию данных с обоих этих рынков вместе для определения срочной структуры процентных ставок. Так, например, при прочих равных, цена облигации будет выше (т.е. будет подразумевать меньшую доходность вложений на данный срок), так как обладание облигацией несёт дополнительные преимущества. Так, владелец облигации может оставить её в залог, может осуществить сделку РЕПО... и т.п. Помимо этого, на цены (а следовательно,

[1] Вообще говоря, это понятие применимо к любой процентной ставке: начисляемой как дискретно, так и непрерывно. Но, как уже говорилось раньше, мы будем работать с непрерывно начисляемой процентной ставкой.

и на процентные ставки) непосредственно влияют такие параметры, как кредитное качество и ликвидность.

- Кредитное качество инструмента характеризует степень достоверности исполнения контрагентом всех взятых им на себя обязательств. Так, эмитент облигации может допустить дефолт и не заплатить по долгу. Или заплатить частично. Риск этого уменьшает цену облигации, увеличивая её доходность для инвестора, решившегося взять на себя этот риск (кредитный риск).

- Ликвидность инструмента характеризует лёгкость, с которой мы сможем продать имеющийся у нас инструмент на рынке. Высокая ликвидность означает, что это возможно быстро и по рыночной цене. Низкая ликвидность означает, что либо быстро продать невозможно, например, ввиду отсутствия спроса, либо необходимо сделать существенную скидку с цены, чтобы заинтересовать покупателей. Низкая ликвидность также уменьшает цену инструмента и увеличивает доходность: инвестору нужна компенсация за то, что он берёт на себя риск ликвидности — риск не суметь реализовать инструмент на рынке вовремя и/или по рыночной цене.

Определение. Облигацией мы будем называть обязательство, расписание платежей по которому заранее известно (т.е. мы рассматриваем облигации с фиксированным купоном и без встроенных опционов), обращающееся на вторичном рынке. Эти платежи могут быть как процентами, так и частичным или полным погашением основного долга.

В этой упрощённой методике мы будем рассматривать группу облигаций одного кредитного качества (например, выпущенные одним эмитентом) и примерно одной ликвидности.

1.3 Ценообразование облигаций

Чтобы использовать котировки облигаций для определения срочной структуры процентных ставок, необходимо определить связь между этими объектами. Рассмотрим бескупонную облигацию номиналом 1 со сроком до погашения t. Бескупонная облигация — это та, по которой будет проведена всего одна выплата. Пусть эта выплата имеет размер 1 и произойдёт через время t. И пусть облигация безрисковая, т.е. отсутствуют кредитные риски (риски неуплаты), риски ликвидности (невозможности продать бумагу) и другие. Тогда её текущая стоимость будет равна $d(t)$. Кривая доходности, соответствующая этой функции дисконтирования ($r(t) = -\frac{1}{t}\ln d(t)$), называется [безрисковой] бескупонной кривой доходности.

Если у нас теперь есть реальная бескупонная облигация, её цена будет ниже, чтобы компенсировать возможные риски, а бескупонная кривая доходности, построенная по таким облигациям, будет лежать выше безрисковой бескупонной кривой доходности. Тем не менее, для оценки финансовых инструментов, схожих с данной облигацией по кредитному качеству и ликвидности, скорее подойдёт именно эта кривая, а не безрисковая.

Если облигация купонная, т.е. по ней имеются периодические выплаты процентов (купонов), или амортизационная,т.е. основной долг выплачивается по частям, то потоков платежей будет больше. Пусть имеется n потоков платежей во времена $\tau_1, ..., \tau_n$ размерами $F_1, ..., F_n$ соответственно. Логично предположить[2], что стоимость такой облигации будет равна стоимости портфеля (набора) из n бескупонных облигаций со сроками до погашения $\tau_1, ..., \tau_n$ и номиналами $F_1, ..., F_n$ соответственно. В таком случае, стоимость P нашей купонной облигации будет определяться соотношением

$$P = \sum_{s=1}^{n} F_s d(\tau_s). \tag{1}$$

В реальности на ценообразование очень сильное влияние оказывают вопросы кредитного качества, ликвидности, налогообложения. Учёт кредитного качества облигации возможен, но в рамках данной простой методики мы его опустим. Ликвидность же и налогооблажение обычно не рассматриваются ввиду отсутствия на сегодняшний день адекватного их описания (как математического, так и экономического).

Определение. <u>Доходностью к погашению</u> облигации называется такая постоянная величина доходности r_{YTM}, при которой стоимость облига-

[2]Это стандартное предположение, и обсуждение его правдоподобности выходит за рамки данной методики. Укажем лишь, что владение портфелем бескупонных облигаций даёт больше возможностей, нежели владение одной купонной облигацией: так, портфель можно продать частями, а купонную облигацию только целиком. К тому же, купонные платежи и погашение основного долга могут по-разному облагаться налогом

ции, рассчитанная по формуле (1) при плоской структуре процентных ставок: $r(t) \equiv r_{YTM}$, будет совпадать с текущей наблюдаемой рыночной стоимостью.

Определение. Дюрацией облигации называется средневзвешенный срок до выплат по ней (взвешивание проводится по текущей приведённой стоимости этих платежей):

$$\frac{\sum_{s=1}^{n} \tau_s F_s d(\tau_s)}{\sum_{s=1}^{n} F_s d(\tau_s)} .$$

1.4 Исходные данные

Для определения кривой доходности у нас имеется «моментальный снимок» рынка. Это набор описаний облигаций (моментов и объёмов обещанных платежей) и их текущих рыночных цен.

На самом деле, на рынке нет «цены облигации» как таковой. Вместо этого участнику рынка доступно несколько показателей:

- Цена продавца (ask price) — это наименьшая цена, по которой выставлена заявка на продажу, т.е. цена, по которой бумагу можно немедленно купить. Объём этой заявки — отдельный вопрос: вполне возможно, что для покупки интересующего нас количества облигаций необходимо заплатить больше, так как по указанной цене может продаваться лишь малый объём, а остальное придётся докупать по более высоким ценам.

- Цена покупателя (bid price) — это наибольшая цена, по которой выставлена заявка на покупку.

- Цена последней сделки (last price) — это цена, по которой была проведена последняя сделка с этой бумагой.

Если доступны данные с периодичностью лишь раз в день, то эти цифры рассчитываются биржей на конец торгового дня по специальному алгоритму. В таком случае также доступны статистические величины: среднее, минимальное и максимальное значения цены.

Отдельно отметим, что цена последней сделки по облигации не обязана лежать между текущими ценами покупателя и продавца, т.к. физически эти цифры могут относиться к разным моментам времени. Кроме того, ближайшая сделка не обязательно будет проведена по ценам покупателя или продавца, т.к. с одной стороны, может быть достаточно выставить котировку внутри bid-ask спрэда, чтобы немедленно нашёлся другой игрок, желающий её исполнить, а с другой стороны, купить по лучшей цене можеть быть возможно лишь минимальное количество бумаг.

Случается также, что за торговый день не было ни одной сделки по бумаге. Тем не менее, котировки на покупку и продажу вполне могут быть доступны. Для не очень ликвидных облигаций это обычное явление.

Мы предполагаем, что доступны следующие данные.

1. Количество наблюдаемых облигаций N. Отдельные облигации будут обозначаться индексом $k = 1, ..., N$.

2. Моменты обещанных выплат, общие для всех облигаций: τ_s, $s = 1, ..., n$. В случае, если моменты выплат по различным облигациям не совпадают, дополнительно вводится нулевая выплата в нужный момент.

3. Обещанные объёмы выплат (возможно, нулевые) по k-ой облигации в s-ый момент времени: $F_{s,k}$, $s = 1, ..., n$, $k = 1, ..., N$.

4. Цены облигаций P_k, $k = 1, ..., N$, взятые до вычета накопленного купонного дохода.

5. Котировки на покупку и на продажу: b_k, a_k, $k = 1, ..., N$.

2 Предположения и требования к методике

2.1 Отражение наблюдаемых цен

Мы предполагаем, что наблюдаемые цены P_k не точно отражают текущую приведённую стоимость потоков платежей по облигации, но отличаются от истинного значения приведённой стоимости на некоторую случайную величину (ошибку, шум).

Эта величина, очевидно, является характеристикой ликвидности рассматриваемой бумаги, т.к. чем меньше ликвидность, тем больше отличается цена, по которой удаётся совершить сделку, от справедливой оценки приведённой стоимости.

Из показателей ликвидности нам доступен лишь bid-ask спрэд, характеризующий как раз разброс возможных цен сделки. Довольно естественно, что цена сделки может свободно и случайно колебаться как в пределах bid-ask спрэда, так и в разумной степени за его пределами. Математически это можно записать как $P_k = PV_k + \epsilon_k$, где ϵ_k - нормально распределённая случайная величина со стандартным отклонением, равным половине бид-аск спрэда.

Таким образом, условие приближения наблюдаемых на рынке цен облигаций запишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{4}{(a_k - b_k)^2} \left(P_k - PV_k(r)\right)^2 \to \min_{r(\cdot)}, \tag{2}$$

где $PV_k(r) = \sum\limits_{s=1}^{n} F_{s,k} e^{-r(\tau_s)\tau_s}$ — расчётная справедливая стоимость k-ой облигации при кривой процентных ставок $r(t)$.

2.2 Убывание функции дисконтирования

Мы потребуем, чтобы функция $d(t) = e^{-r(t)t}$ не возрастала по t. Для этого в качестве неизвестной мы выберем кривую мгновенных форвардных процентных ставок $f(t)$, которая при непрерывном начислении процентов связана с годовыми процентными ставками и функцией дисконтирования следующим образом:

$$d(t) = e^{-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad r(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Таким образом, мгновенная форвардная процентная ставка есть в некотором смысле «плотность начисления процентов». И условие невозрастания функции дисконтирования равносильно неотрицательности мгновенных форвардных процентных ставок. Для того, чтобы обеспечить $f(t) \geqslant 0$, положим $f(t) = g^2(t)$. Условие приближения наблюдаемых цен (2) перепишется следующим образом.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{4}{(a_k - b_k)^2} \left(P_k - e^{-\int_0^{\tau_s} g^2(x)\,\mathrm{d}x}\right)^2 \to \min_{g(\cdot)}, \tag{3}$$

2.3 Гладкость

Заметим, что одно условие (2) , а следовательно, и условие (3), не задаёт кривую доходности целиком, т.к. оно зависит лишь от процентных ставок на фиксированные периоды $r(\tau_s)$, $s = 1, ..., n$. Для определения значений кривой доходности в промежуточных точках необходимо дополнительное предположение. Мы предположим, что кривая процентных ставок обладает, в некотором смысле, максимальной гладкостью. Это позволит нам получать приятные глазу и реалистичные кривые доходности. Математически мы запишем условие гладкости в виде

$$\int_0^{\tau_n} g'(x)^2 \, \mathrm{d}x \to \min_{g(\cdot)} . \tag{4}$$

Разумеется, возможны и другие формализации этого свойства.

Заметим, что условие (3) должно быть выполнено одновременно с условием (4), несмотря на то, что они, по сути, представляют собой противоречащие друг другу цели: (3) отвечает за точность решения, а (4) — за его гладкость. В рамках концепции, предложенной А. Н. Тихоновым [2], мы введём параметр регуляризации α, отвечающий за баланс между гладкостью и точностью, и рассмотрим итоговый функционал качества, в котором (4) учтено с весом α по сравнению с (3).

$$\alpha \int_0^{\tau_n} g'(x)^2 \, \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{(a_k - b_k)^2} \left(P_k - e^{-\int_0^{\tau_s} g^2(x) \, \mathrm{d}x} \right)^2 \to \min_{g(\cdot)} . \tag{5}$$

Выбор параметра регуляризации α соответствует фиксированию наших предпочтений в плане баланса качества приближения цен и визуальной привлекательности кривой. Стоит отметить, что гладкая кривая, помимо визуальной привлекательности, более реалистична, т.к. предпочтения и настроения инвесторов на рынке непрерывно зависят от срока до погашения, что означает малую изменчивость мгновенной форвардной процентной ставки $f(t)$, что в свою очередь даёт малые значения интеграла (4).

Величина α также может быть интерпретирована в рамках байесовского подхода к оценке кривой доходности. В таком случае выражение (4) соответствует минимуму потенциальной энергии — априорному условию, налагающемуся на неизвестную функцию $g(\cdot)$, а α — единственный параметр экспоненциального распределения потенциальной энергии. Величина α^{-1}, в таком случае, будет иметь смысл средней энергии (средней негладкости) кривой доходности и может быть оценена на основании статистических данных.

3 Решение задачи

Математическое решение задачи (5) основывается на аппарате оптимального управления и принципа максимума Понтрягина. С выводом можно ознакомиться, например, в работе [1]. Оптимальная функция $g(\cdot)$ представляет собой сплайн некоторого специального вида:

$$g(t) = p_{s-1}\varphi_{\lambda_s}(\tau_s - t) + p_s\varphi_{\lambda_s}(t - \tau_{s-1}), t \in [\tau_{s-1},\, \tau_s), \tag{6}$$

где

$$\varphi_{\lambda_s}(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_s}t}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_s}(\tau_s-\tau_{s-1})}\,, & \lambda_s > 0, \\ \frac{\sin\sqrt{-\lambda_s}t}{\sin\sqrt{-\lambda_s}(\tau_s-\tau_{s-1})}\,, & \lambda_s < 0, \\ \frac{t}{\tau_s-\tau_{s-1}}\,, & \lambda_s = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, определение кривой доходности сводится к нахождению коэффициентов p_s, $s = 0, ..., n$ и λ_s, $s = 1, ..., n$ по наблюдаемым данным. В [1] также показано, что наборы λ_s, $s = 1, ..., n$ и p_s, $s = 0, ..., n$ не могут быть произвольными. Функция $g(t)$, определяемая (6) должна быть непрерывно дифференцируемой в узлах склейки τ_s, $s = 1, ..., n$, а числа λ_s должны удовлетворять некоторому условию, которое не приводится здесь в силу своей громоздкости.

Сам непосредственный поиск численных значений неизвестных коэффициентов осуществляется любым методом нелинейной оптимизации. Производные функционала (5) по переменным p_s, $s = 0, ..., n$ и λ_s, $s = 1, ..., n$ легко выписываются аналитически (тем не менее, соответствующие выражения не приводятся, т.к. они достаточно громоздки). Чуть более сложны выражения для вторых производных, однако они тоже могут быть выписаны.

Несмотря на то, что в [1] получено столько же уравнений, сколько неизвестных параметров, решение задачи нелинейной минимизации на практике оказывается более быстрым методом, нежели решение системы нелинейных уравнений, полученной там.

4 Численный пример

Пусть истинная кривая доходности имеет вид, показанный на рис. 1.

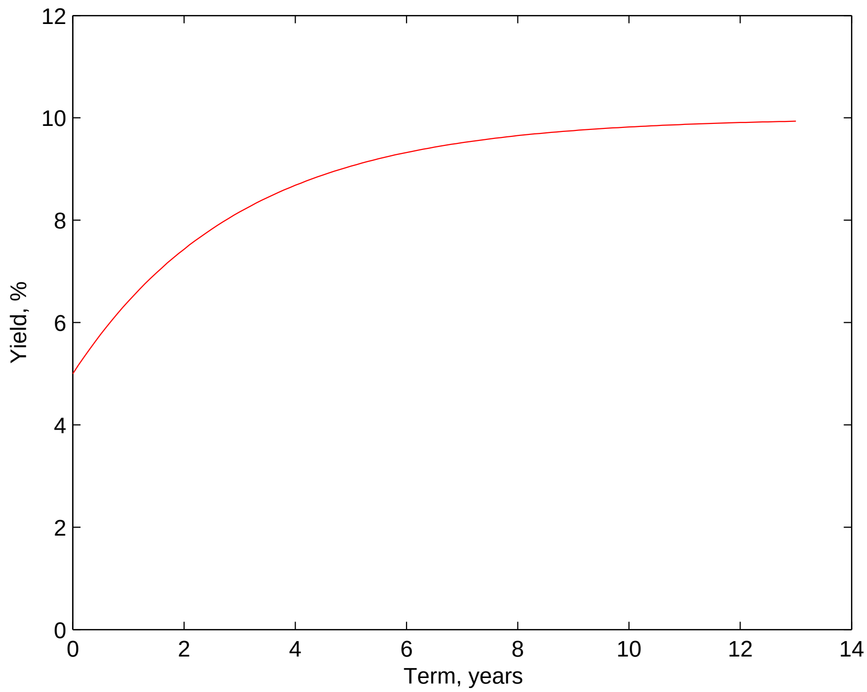

Рис. 1: Истинная кривая доходности

Рассмотрим 5 торгуемых облигаций с ежегодными выплатами купонов в 10% годовых с погашением через 5, 7, 9, 11 и 13 лет. Соответствующие истинные приведённые стоимости (PV), котировки на продажу (Ask) и покупку (Bid) и последние наблюдаемые цены (равные для простоты полусумме котировок на покупку и продажу) представлены в таблице.

Моменты обещанных потоков платежей, очевидно, равны $\tau_s = s$, $s = 1, ..., 13$. Матрица обещанных потоков платежей $F_{s,k}$ представлена ниже.

Вычисления при $\alpha = 10$ дают следующе значения p_s и λ_s: График соответствующей кривой доходности в сравнении с истинной приведён на рис. 2.

Номер	Срок до погашения	PV	Bid	Ask	Цена
1	5	96.4773	96.4479	96.4973	96.4723
2	7	96.3386	96.2985	96.3985	96.3485
3	9	96.3010	96.2711	96.4211	96.3461
4	11	96.3841	96.2051	96.4051	96.3051
5	13	96.5334	96.4888	96.7388	96.6138

Таблица 1: Рыночные данные

Номер	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
1	10	10	10	10	100	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10	10	10	10	10	10	100	0	0	0	0	0	0
3	10	10	10	10	10	10	10	10	100	0	0	0	0
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100	0	0
5	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

Таблица 2: Матрица потоков платежей

Следует обратить внимание на то, что результирующая кривая не совпадает с исходной («истинной»). На самом деле, она даже «лучше» неё. В самом деле, из рис. 2 видно, что оценённая кривая более гладкая (менее изменчивая), нежели истинная. А приведённая ниже таблица показывает, что наблюдаемые цены облигаций приближаются при помощи оценённой кривой доходности лучше, чем при помощи истинной. Из таблицы видно, что оценённая кривая доходности даёт лучшее приближение наблюдаемым ценам, нежели истинная. Это естественная ситуация в присутствии случайных ошибок наблюдения: ведь оценённая кривая доходности по построению — такая кривая, которая имеет наименее изменчивую структуру при максимальном приближении именно наблюдаемых цен.

Оценка кривой доходности, получаемая любым методом, в том числе и рассматриваемым, не всегда может восстановить истинную кривую доходности. Причинами этого обычно является недостаточность информации (малое количество облигаций, отсутствие облигаций с большим или малыми сроками до погашения) или её плохое качество (большие bid-ask спрэды, пропуски и выбросы в данных). Тем не менее, отметим, что итоговая оценка, даже если она не совпадает с истинной кривой доходности, даёт разумную ей альтернативу как в части приближения наблюдаемых

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0.2692	0.2870	0.2970	0.3036	0.3120	0.3216	0.3274
p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0.3264	0.3249	0.3252	0.3240	0.3212	0.3183	0.3172

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
-0.0431	-0.0292	0.0052	0.0069	0.0004	-0.0234	-0.0183
λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	
0.0151	-0.0036	-0.0056	-0.0044	0.0044	0.00664	

Таблица 3: Значения p_s и λ_s

Цена	По истинной	Разница	По оценённой	Разница
96.4723	96.4773	0.0050	96.4701	-0.0022
96.3485	96.3386	-0.0099	96.3560	0.0075
96.3461	96.3010	-0.0451	96.3228	-0.0233
96.3051	96.3841	0.0790	96.3598	0.0547
96.6138	96.5334	-0.0804	96.5824	-0.0314

Таблица 4: Сравнение ошибок для истинной кривой и оценки

цен (цены, рассчитанные по оценённой кривой доходности обычно имеют тот же порядок ошибки по сравнению с наблюдаемыми, что и цены, рассчитанные по истинной кривой), так и в части изменчивости процентных ставок (изменчивость оценки обычно ниже при сохранении того же среднего уровня ошибки). Таким образом,

Проведём также вычисления для завышенного значения α =??? и заниженного значения $\alpha = 0.5$. Соответствующие графики кривых доходности представлены на рис. 4 и 3. Видно, что завышение α ведёт к слишком плоской кривой доходности (тот факт, что она «слишком» плоская, подтверждается тем, что ошибки приближения цен, полученные для неё, гораздо больше, чем у "истинной"кривой (и значительно больше, чем половина бид-аск спрэда — см. таблицу), а занижение α влечёт неоправданные её колебания. При большом α полезная информация принимается за шум, а при маленьком — шум принимается за полезную информацию.

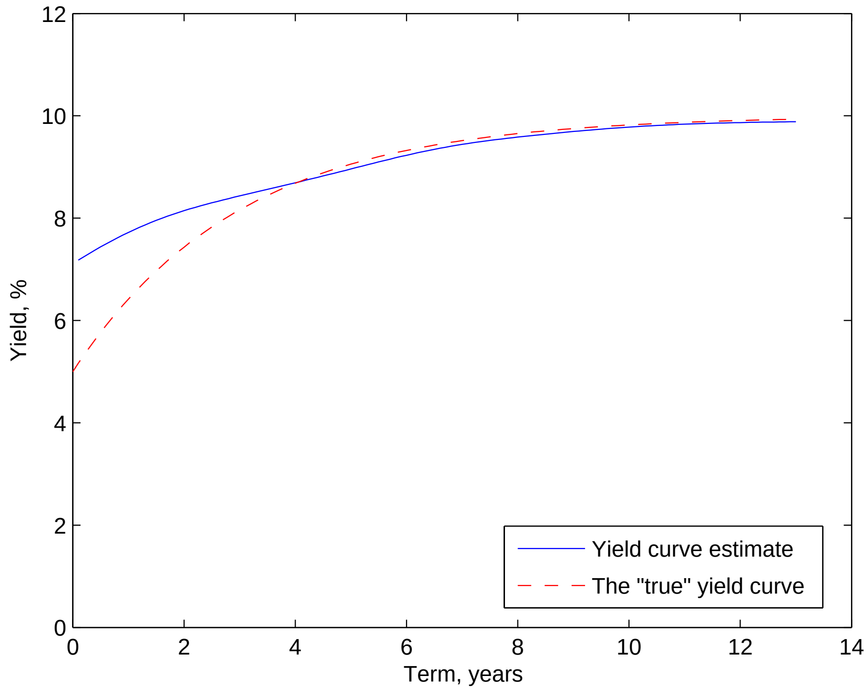

Рис. 2: Оценка кривой доходности

Список литературы

[1] *Лапшин, В.* Определение срочной структуры процентных ставок / В. Лапшин // *Вестн. моск. ун-та . Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика.* — 2009. — № 4. — С. 37–43.

[2] *Тихонов, А.* Методы решения некорректных задач / А. Тихонов, В. Арсенин. — М.: Наука, 1979.

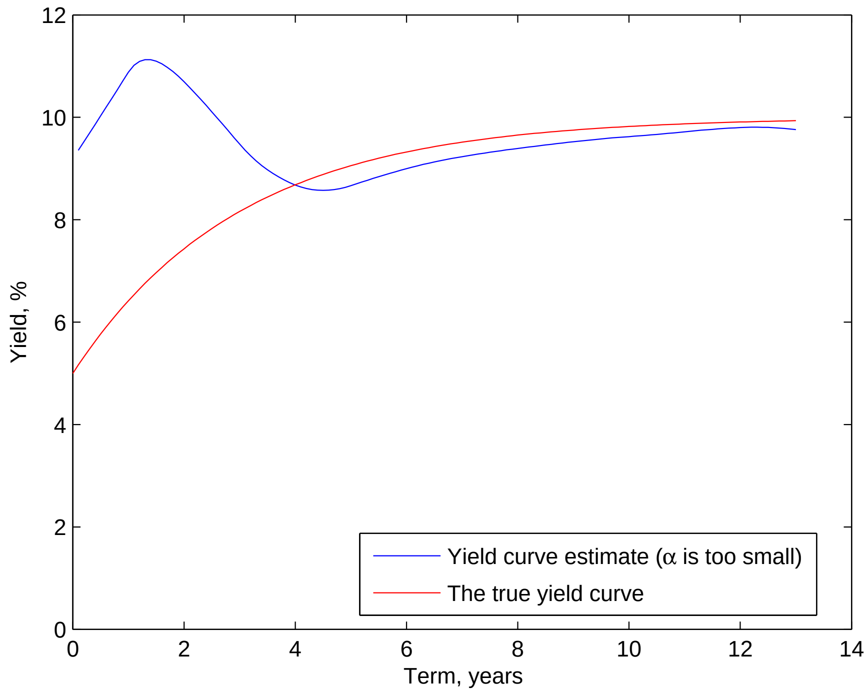

Рис. 3: Оценка кривой доходности, маленькое значение α

Цена	По истинной	Разница	При $\alpha = 150$	Разница
96.4723	96.4773	0.0050	96.2896	-0.1827
96.3485	96.3386	-0.0099	96.5352	0.1867
96.3461	96.3010	-0.0451	96.4809	0.1348
96.3051	96.3841	0.0790	96.4469	0.1417
96.6138	96.5334	-0.0804	96.4273	-0.1865

Таблица 5: Ошибки при завышенном α

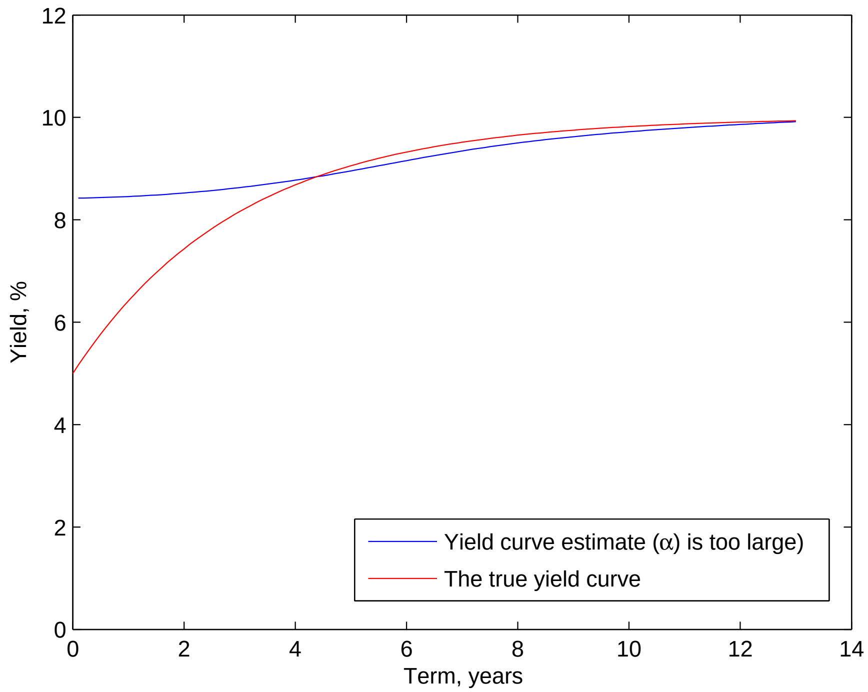

Рис. 4: Оценка кривой доходности, большое значение α